

同步练习 P181 6 廖国勇 2016.4.12

6. 设直线 $L: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$

相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b .

解: 设 $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$, $F_x = -2x$, $F_y = -2y$, $F_z = 1$

$$n = (F_x, F_y, F_z)|_{(1, -2, 5)} = (-2, 4, 1)$$

平面 π 的方程为: $-2(x-1) + 4(y+2) + 1 \cdot (z-5) = 0$

$$\text{化简: } -2x + 4y + z + 5 = 0 \quad (1)$$

由于直线 L 在平面 π 上, 由平面束方程可知 π 的方程可以

$$\text{表示为: } x+y+b + \lambda(x+ay-z-3) = 0$$

$$\text{即 } (1+\lambda)x + (1+a\lambda)y - \lambda z + b-3\lambda = 0 \quad (2)$$

由于 (1)(2) 是同一方程, 于是

$$\frac{-2}{1+\lambda} = \frac{4}{1+a\lambda} = \frac{1}{-\lambda} = \frac{5}{b-3\lambda}$$

$$\text{解之得: } \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

所以 $a = -5$, $b = -2$

同步练习 P182 三 廖周勇 2016.4.12

证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($x, y, z, a > 0$) 上任一点的切平面在坐标轴上的截距之和为常数。

证明: 设 (x_0, y_0, z_0) 为曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ 上任一点, 显然

$\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$. 先求过 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程

设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$

$$F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

切平面方程为: $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$ (1)

在方程 (1) 中令 $y=0=z$ 得切平面在 x 轴上的截距 x' ,

$$x' = \sqrt{x_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a}\sqrt{x_0}$$

同理可得, 平面在 y 轴和 z 轴上的截距分别为

$$y' = \sqrt{a}\sqrt{y_0}, \quad z' = \sqrt{a}\sqrt{z_0}$$

于是 $x' + y' + z' = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

同步练习 P87.4

设函数 $Z = Z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定, 求函数 $Z = Z(x, y)$ 的极值.

解: 方程两边同时对 x 求导: $2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z}$

方程两边同时对 y 求导: $-6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z} = 0 \end{cases}$$

得驻点 $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases}$

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(y+z) - (x-3y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-3(y+z) - (x-3y)(\frac{\partial z}{\partial y} + 1)}{(y+z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(10 - \frac{\partial z}{\partial y})(y+z) - (-3x+10y-z) \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial y})}{(y+z)^2}$$

在 $(9, 3, 3)$ 处, $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{5}{3}$ $B^2 < AC$, $A > 0$ 故

$x=9, y=3$ 时 Z 取极小值 3.

在 $(-9, -3, -3)$ 处, $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{5}{3}$, $B^2 < AC$, $A < 0$, 故

$x=-9, y=-3$ 时, Z 取极大值 -3.

同步练习 P188 6 廖国勇 2016.4.12

在曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上求一点, 使它到点 $(1, \sqrt{2}, 3\sqrt{3})$ 的距离最短, 并求最短距离。

解: 依题意知, 求 $d^2 = (x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-3\sqrt{3})^2$ 在条件

$\varphi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 下的极值。

构造拉格朗日乘数函数

$$L(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-3\sqrt{3})^2 + \lambda(z - \sqrt{x^2 + y^2})$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) - \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-\sqrt{2}) - \lambda \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-3\sqrt{3}) + \lambda = 0 \\ z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

得驻点

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2\sqrt{2} \\ z=2\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{2} \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$$

由题意, 最短距离一定存在, 在 $(2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ 点 $d^2 = 6$, 在 $(-1, -\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 点

外 $d^2 = 24$, 于是 $(2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ 点就为所求, 此时 $d = \sqrt{6}$.

P188 7 廖国勇 2016.4.12 同步练习 P188 7

求过点 $(2, 1, \frac{1}{3})$ 的平面, 使它与三个坐标平面在第 I 卦限所围成的立体体积最小.

解: 设平面与三坐标轴轴的截距为 x, y, z , 这里 $x, y, z > 0$

则 $V(x, y, z) = \frac{1}{6}xyz$, 满足条件 $\varphi(x, y, z) = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{3}}{z} - 1 = 0$

构造拉格朗日乘数函数

$$L(x, y, z) = \frac{1}{6}xyz + \lambda(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{3}}{z} - 1)$$

解方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{6}yz - \frac{2\lambda}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{6}xz - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{6}xy - \frac{\frac{1}{3}\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{3}}{z} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$$

由问题解一定存在, 而所求驻点为唯一驻点, 故驻点就是最小值点, 于是所求平面方程为

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$

化简

$$x + 2y + 6z - 6 = 0$$